铜仁一中高二年级防疫期间“停课不停学”网上第七次周考

数学（理科）参考答案

1．D

【解析】

$\because (x+2i)i=y-i,\therefore -2+xi=y-i,\therefore \begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$，

则$|x-yi|=|-1+2i|=\sqrt{5}.$

故选 D.

2．C

【解析】

【分析】

直接利用分类加法原理计算，即可得答案.

【详解】

根据分类加法原理计算，$N=16+15=31$.

故选：C.

【点睛】

本题考查分类加法原理的应用，考查运算求解能力，属于基础题.

3．A

【解析】

【分析】

根据否命题的要求“否条件，否结论”即可找到答案、

【详解】

因为命题“奇函数的图像关于原点对称”的条件是“奇函数”，

结论是“图像关于原点对称”.

否命题为“不是奇函数的图像不关于原点对称”.

故选：A

【点睛】

本题主要考查命题的否命题，否命题是“否条件，否结论”，属于简单题.

4．A

【解析】

【分析】

由题得 c=1,再根据△MF_2N 的周长＝4a＝8 得 a＝2，进而求出 b 的值得解.

【详解】

∵F_1(－1,0)，F_2(1,0)是椭圆的两个焦点，∴c＝1，又根据椭圆的定义，△MF_2N 的周长＝4a＝8，得 a＝2，进而得 b＝$\sqrt{3}$，所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

故答案为：A

【点睛】

本题主要考查椭圆的定义和椭圆方程的求法，意在考查学生对这些知识的掌握水平和分析推理能力.

5．D

【解析】

【分析】

因为每个班级的选择可以重复出现，由分步计数既可以求得答案.

【详解】

因为每个班级的选择可以重复出现，所以第一个班先选有 5 种；第二班再选有 5 种；最后一个班最后选有 5 种，分步计数再相乘，则共有5^3种不同的选法.

故选：D

【点睛】

本题考查分步乘法计数原理求事件的所有可能，属于基础题.

6．C

【解析】

【分析】

求导函数，利用函数 $f(x)=x^2(ax+b)$ 在 $x=2$ 时极值为 -4 可得 $\begin{cases}f'(2)=0\\f(2)=-4\end{cases}$，解方程求出 a,b，再令 $f'(x)<0$ 即可求解.

【详解】

由函数 $f(x)=x^2(ax+b)=ax^3+bx^2$，

所以 $f'(x)=3ax^2+2bx$，

所以 $\begin{cases}f'(2)=0\\f(2)=-4\end{cases}$，即 $\begin{cases}12a+4b=0\\8a+4b=-4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$，

所以 $f'(x)=3x^2-6x$，

令 $f'(x)<0$，则 $3x^2-6x<0$，解得 $0<x<2$，

令 $f'(x)>0$，则 $x<0$ 或 $x>2$.

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 取极值且函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0,2)$.

故选：C

【点睛】

本题考查了由函数的极值求参数值、利用导数研究函数的单调性，属于基础题.

7．A

【解析】

【分析】

根据双曲线方程确定焦点位置，再根据渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x$ 求解.

【详解】

因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$

所以焦点在 x 轴上，

又因为渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x$，

所以 $\frac{3}{a}=\frac{3}{2}$，

所以 $a=2$.

故选：A

【点睛】

本题主要考查双曲线的几何性质，还考查了理解辨析的能力，属于基础题.

8．A

【解析】

【分析】

利用充分必要性定义及不等式性质即可得到结果.

【详解】

当 $a>1$，且 $b>1$ 时，显然 $\begin{cases}a+b>2\\ab>1\end{cases}$ 成立，故充分性具备；

反之不然，比如：a=100，b=0.5 满足$\begin{cases}a+b>2\\ ab>1\end{cases}$，但推不出$a>1$，且$b>1$，故必要性不具备，所以$p$是$q$的充分不必要条件.

故选 A

【点睛】

本题考查了不等式的性质、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

9．A

【解析】

【分析】

根据题意得到$x+y-3=0$且$x^2+y^2-2x\geq 0$，或$x^2+y^2-2x=0$，画出图像，分别判断得到答案.

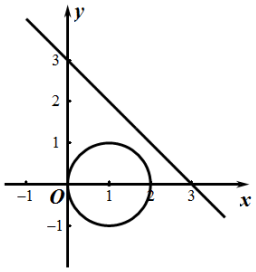
【详解】

$(x+y-3)\sqrt{x^2+y^2-2x}=0$，

故$x+y-3=0$且$x^2+y^2-2x\geq 0$，如图所示：画出图像知，表示一条直线；

或$x^2+y^2-2x=0$，即$\left(x-1\right)^2+y^2=1$表示一个圆.

故选：A.



【点睛】

本题考查了方程表示的曲线，漏解是容易发生的错误.

10．B

【解析】

【分析】

令$n=k+1$，根据求出$f\left(k+1\right)$的表达式，比较$f\left(k\right)$，由此求得$g\left(k\right)$的值.

【详解】

当$n=k+1$时，$f\left(k+1\right)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$，而$f\left(k\right)=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k}$，

所以$g(k)=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k}$，故选 B.

【点睛】

本小题主要考查数学归纳法，考查运算化简能力，考查对比分析能力，属于基础题.

11．C

【解析】

【分析】

先明确四个小岛连通的方法数，再从中选 3 个，然后减去首尾相接的即可.

【详解】

岛的连接分式共有$C_4^2=6$种，从种中任意选出 3 个作为一种方案，有$C_6^3=20$种，20 种包含 3 岛首尾相接的情况有 4 种，不符合题意，

所以一共有 20-4=16 种

故选：C

【点睛】

本题主要考查分类计数原理，还考查了理解辨析的能力，属于基础题.

12．B

【解析】

【分析】

分别写出直线 l 与曲线 $y=f\left(x\right)$，$y=g\left(x\right)$ 相切的方程，再对比系数即可.

【详解】

由已知得直线 l 的方程为：$y-\mathrm{e}^{x_1}=\mathrm{e}^{x_1}\left(x-x_1\right)$，$y-\sqrt{x_2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}\left(x-x_2\right)$，

$\therefore\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}\\ \mathrm{e}^{x_1}\left(1-x_1\right)=\dfrac{\sqrt{x_2}}{2}\end{cases}$，$\therefore$消去 e^{x_1} 整理得 $x_1+x_2=1$.

故选：B.

【点睛】

本题考查导数的几何意义，考查学生的计算能力，特别要注意过某点的切线与在某点的切线的区别，是一道中档题.

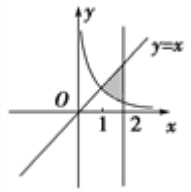
13． $\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dx$

【解析】

如图所示，可知交点横坐标为 $x=1,x=2$，

结合定积分的定义可知阴影部分的面积可表示为：

$\int_1^2 xdx-\int_1^2\dfrac{1}{x}dx=\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dx$.



14． –2

【解析】

【分析】

根据题意，可知 $\vec{a}+\lambda\vec{b}=\left(1,1+\lambda,\lambda\right)$，再根据垂直的数量积公式，即可求出结果.

【详解】

因为 $\vec{a}=\left(1,1,0\right)$，$\vec{b}=(0,1,1)$，所以 $\vec{a}+\lambda\vec{b}=\left(1,1+\lambda,\lambda\right)$，

又 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{a}$，所以1+1+$\lambda$+0=0，所以 $\lambda=-2$.

故答案为：–2.

【点睛】

本题主要考查了空间向量垂直的数量积公式的应用，属于基础题.

15．180.

【解析】试题分析：按颜色种数分类：3 种颜色着色，b,c 不同色，a,d 同色，有 $A_5^3=5\times4\times3=60$,4 种颜色着色，每个区域颜色不一样，$A_5^4=5\times4\times3\times2=120$，故共有 60+120=180.

考点：排列综合应用.

16． $3^{2007}+6021$

【解析】

【分析】

由 $f(m,n+1)=f(m,n)+3$ 得 $f(2008,2008)=f(2008,1)+2007\times3$，由 $f(m+1,1)=3f(m,1)$ 得 $f(2008,1)=3^{2007}f(1,1)$，然后算出即可.

【详解】

因为 $f(m,n+1)=f(m,n)+3$

所以 $f(2008,2008)=f(2008,2007)+3=f(2008,2006)+2\times3=f(2008,2005)+3\times3$

$=\cdots=f(2008,1)+2007\times3$

因为 $f(m+1,1)=3f(m,1)$

所以 $f(2008,1)=3f(2007,1)=3^2f(2006,1)=\cdots=3^{2007}f(1,1)$

因为 $f(1,1)=1$，所以 $f(2008,1)=3^{2007}$

所以 $f(2008,2008)=3^{2007}+6021$

故答案为：$3^{2007}+6021$

【点睛】

本题解答的关键是看清条件的实质，算出即可.

17. (1) **241920种；** (2) **10080种；** (3) **2880种.**

【解析】

【分析】

(1) 先排甲，有6种，剩下的8个元素全排列有 A_8^8 种，根据分步计数原理得出结果；

(2) 先排甲、乙，再排其余7人，再根据分步计数原理得出结果；

(3) 先排4名男生有 A_4^4 种方法，再将5名女生插在男生形成的5个空上有 A_5^5 种方法，再根据分步计数原理得出结果.

【详解】

解：(1) 先排甲有6种，其余有 A_8^8 种，

∴共有 $6\cdot A_8^8=241920$ 种排法.

(2) 先排甲、乙，再排其余7人，共有 $A_2^2\cdot A_7^7=10080$ 种排法.

(3) 先排4名男生有 A_4^4 种方法，再将5名女生插在男生形成的5个空上有 A_5^5 种方法，

故共有 $A_4^4\cdot A_5^5=2880$ 种排法.

【点睛】

本题考查排列组合问题，结合元素分析法（优先考虑特殊元素），位置分析法（优先考虑特殊位置），直接法，间接法（排除法），捆绑法，等机会法，插空法等常见的解题思路.

18.（1） $m\geq1$**；（2）** $[-8,+\infty)$

【解析】

试题分析：（1）由题设知：$f(x_1)_{\min}\geq g(x_2)_{\max}$，即可转化为研究函数最值即可.

（2）由题设知 $f(x_1)_{\max}\geq g(x_2)_{\max}$，即可转化为研究函数最值即可.

试题解析：

（1）由题设知：$f(x_1)_{\min}\geq g(x_2)_{\max}$，

∵ $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减，在 $(0,3)$ 上递增，∴ $f(x_1)_{\min}=f(0)=0$

又∵ $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上递减，∴ $g(x_2)_{\max}=g(0)=1-m$

∴有 $0\geq1-m$，m 的范围为 $[1,+\infty)$

（2）由题设知 $f(x_1)_{\max}\geq g(x_2)_{\max}$，

∴有 $f(3)\geq g(0)$，即 $9\geq1-m$，∴ M 的范围为 $[-8,+\infty)$

19.（1）见解析；（2）$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

【解析】

【分析】

（1）由正方形的性质知 $AB//EF$，又由相似三角形可得 $MF//PB$，

再结合面面平行的判定定理即可证明；

（2）由已知条件可推导出 OB，OC，OP 两两垂直，建立空间直角坐标系，

求出平面的法向量，利用公式即可求锐二面角的余弦值.

【详解】

（1）$\because AE//BF$，且 $AE=BF$，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为平行四边形，

$\therefore AB//EF$，又 $AB\subset$ 平面 PAB，

$\therefore EF//$ 平面 PAB，

$\because PM=3CM$，$BF=3FC$，$\angle MCF=\angle PCB$，

$\therefore \Delta MCF\backsim\Delta PCB$，$\therefore MF//PB$，又 $PB\subset$ 平面 PAB，

$\therefore MF//$ 平面 PAB，

$\because MF$，$EF\subset$ 平面 MEF，$MF\cap EF=F$，

$\therefore$ 平面 $MEF//$ 平面 PAB；

（2）如图，连接 AC，BD 相交于点 O，连接 PO，

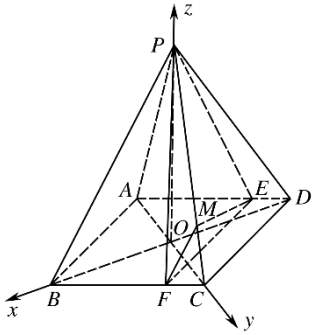
$\because$ 四棱锥 $P-ABCD$ 为正四棱锥，

$\therefore OA=OC=OB=OD=\sqrt{2}$，$AC\perp BD$，

又 $PA=PC=\sqrt{3}$，$\therefore PO=1$，且 $PO\perp AC$，

同理可得 $PO\perp BD$，$\therefore OB$，OC，OP 两两垂直，

故建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$D(-\sqrt{2},0,0)$，

$E\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},0\right)$，$F\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4},0\right)$，$M\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{1}{4}\right)$，$P(0,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{EF}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PE}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},-1\right)$，$\overrightarrow{ME}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4},-\sqrt{2},-\frac{1}{4}\right)$，

令平面 PEF 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\\ -\frac{3\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-z=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=-y, \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y, \end{cases}$

$\therefore$取 $x=-2$，则 $y=2$，$z=\sqrt{2}$，

故 $\vec{m}=(-2,2,\sqrt{2})$，

同理可得平面 MEF 的一个法向量 $\vec{n}=(-1,1,-\sqrt{2})$，

$\therefore \cos\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2+2-2}{\sqrt{10}\times 2}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore$锐二面角 $P-EF-M$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

【点睛】

本题考查空间面面平行的证明以及二面角的余弦值的计算，考查运算求解能力、推理论证能力、空间想象能力，考查数学运算、逻辑推理核心素养，属于常考题.

20.（1）$y^2=4x$；；（2）直线 NL 恒过定点（﹣3，0），理由见解析.

【解析】

【分析】

（1）根据抛物线的方程，求得焦点 F（$\dfrac{p}{2}$，0），利用 $\overrightarrow{FP}=$（2，$2\sqrt{3}$），表示点 P 的坐标，再代入抛物线方程求解.

（2）设 $M(x_0,y_0)$，$N(x_1,y_1)$，$L(x_2,y_2)$，表示出 MN 的方程 $y=\dfrac{4x+y_0y_1}{y_0+y_1}$ 和 ML 的方程 $y=\dfrac{4x+y_0y_2}{y_0+y_2}$，因为 A（3，﹣2），B（3，﹣6）在这两条直线上，分别代入两直线的方程可得 $y_1y_2=12$，然后表示直线 NL 的方程为：$y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_2}$（$x-\dfrac{y_1^2}{4}$），代入化简求解.

【详解】

（1）由抛物线的方程可得焦点 F（$\dfrac{p}{2}$，0），满足 $\overrightarrow{FP}=$（2，$2\sqrt{3}$）的 P 的坐标为（$2+\dfrac{p}{2}$，$2\sqrt{3}$），P 在抛物线上，

所以（$2\sqrt{3}$）$^2=2p$（$2+\dfrac{p}{2}$），即 $p^2+4p-12=0$，$p>0$，解得 $p=2$，所以抛物线的方程为：$y^2=4x$；

（2）设 M（x_0，y_0），N（x_1，y_1），L（x_2，y_2），则 $y_1^2=4x_1$，$y_2^2=4x_2$，

直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y_1-y_0}{\frac{y_1^2-y_0^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_0}$，

则直线 MN 的方程为：$y-y_0=\dfrac{4}{y_1+y_0}$（$x-\dfrac{y_0^2}{4}$），

即 $y=\dfrac{4x+y_0y_1}{y_0+y_1}$①，

同理可得直线 ML 的方程整理可得 $y=\dfrac{4x+y_0y_2}{y_0+y_2}$②，

将 A（3，﹣2），B（3，﹣6）分别代入①，②的方程

可得$\begin{cases}-2=\dfrac{12+y_0y_1}{y_0+y_1}\\ -6=\dfrac{12+y_0y_2}{y_0+y_2}\end{cases}$，消 y_0 可得 $y_1y_2=12$，

易知直线 $k_{NL}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，则直线 NL 的方程为：$y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_2}$（$x-\dfrac{y_1^2}{4}$），

即 $y=\dfrac{4}{y_1+y_2}x+\dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2}$，故 $y=\dfrac{4}{y_1+y_2}x+\dfrac{12}{y_1+y_2}$，

所以 $y=\dfrac{4}{y_1+y_2}$（x+3），

因此直线 NL 恒过定点（－3，0）.

【点睛】

本题主要考查了抛物线的方程及直线与抛物线的位置关系，直线过定点问题，还考查了转化化归的思想和运算求解的能力，属于中档题.

21.（I）$\left(0,\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}\right]$（II）见解析

【解析】

【分析】

（I）根据已知条件将问题转化为 $f'(x)\le 0$ 恒成立，进而转化为求函数 $t(x)$ 的最值即可求解；

（II）将不等式恒成立问题运用分离参数法，转化为函数的最值问题，即可得证.

【详解】

（I）根据题意，得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{ax}$（$x>0$）.因为函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{ax}\le 0$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立，即 $\dfrac{1}{a}\ge x\mathrm{e}^x$ 恒成立，

故只需 $\dfrac{1}{a}\ge\left(x\mathrm{e}^x\right)_{\max}$（$1\le x\le 2$）.

令函数 $t(x)=x\mathrm{e}^x$，则 $t'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$，

当 $x\in[1,2]$ 时，$t'(x)>0$，所以函数 $t(x)=x\mathrm{e}^x$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

所以 $t(x)_{\max}=t(2)=2\mathrm{e}^2$，所以 $\dfrac{1}{a}\ge 2\mathrm{e}^2$，解得 $0<a\le\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$；

所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}\right]$.

（II）当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x-\dfrac{m^2}{2}$（$x>0$），则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$.

令函数 $g(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x^2}$.因为 $g'(x)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}-2<0$，$g(1)=\mathrm{e}-1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，可得 $x_0=-\ln x_0$，

所以对任意 $x\in\left(0,x_0\right)$，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递减；

对任意 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f\left(x_0\right)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0-\dfrac{m^2}{2}$.

要证函数 $f(x)$ 的图象均在 x 轴上方，只需证 $f(x)_{\min}>0$，

即当 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，$\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0-\dfrac{m^2}{2}>0$ 恒成立，

即 $\dfrac{m^2}{2}<\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}+x_0$ 在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上恒成立.

因为当 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，函数 $u\left(x_0\right)=\dfrac{1}{x_0}+x_0$ 是减函数，所以 $2<\dfrac{1}{x_0}+x_0<\dfrac{5}{2}$，

则 $\dfrac{m^2}{2}\le 2$，解得 $-2\le m\le 2$，

所以当 $a=1$ 时，对任意 $m\in\left[-2,2\right]$，函数 $f(x)$ 的图象均在 x 轴上方.

【点睛】

本题考查导数的应用，考查运算求解能力、数形结合思想及化归与转化思想，考查数学运算核心素养.

22.（1）C 的普通方程为 $\left(x-2\right)^2+y^2=4\left(y\geqslant 0\right)$，$l$ 的普通方程为 $4x-3y-8=0$（2）$\left[\dfrac{4}{3},2\right)$

【解析】

【分析】

（1）根据 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 即可消去参数 α，得到曲线 C 的普通方程，代入消元得到直线的普通方程.

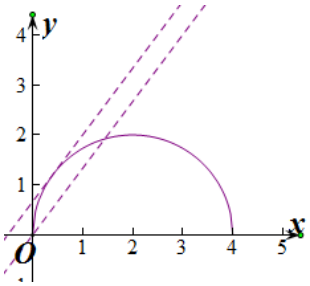
（2）将直线的参数方程化为普通方程，曲线 C 表示圆 $\left(x-2\right)^2+y^2=4$ 的上半部分，画出图象，数形结合分析可得.

【详解】

解：（1）C 的普通方程为 $\left(x-2\right)^2+y^2=4\left(y\geqslant 0\right)$.因为 $a=-\dfrac{4}{3}$，所以 l 的普通方程为 $4x-3y-8=0$.

（2）l 的普通方程为 $4x-3y+3a-4=0$，曲线 C 表示圆 $\left(x-2\right)^2+y^2=4$ 的上半部分，

如图



当 l 经过 $\left(0,0\right)$ 时，$a=\dfrac{4}{3}$，

当 l 与圆 $\left(x-2\right)^2+y^2=4$ 的上半部分相切时，$\dfrac{|3a+4|}{5}=2$，

且 $3a-4>0$，解得 $a=2$，

故 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{4}{3},2\right)$.

【点睛】本题考查参数方程化为普通方程，以及直线与圆的位置关系求参数的范围，属于基础题.